Carlo Felice Manara Maria Molino Cantoni

(Articolo pubblicato in Nuova Secondaria, 17, 4 (1999), pp. 41- 47. Reimpaginato Marzo 2013).

LOGICA E REALTÀ VIRTUALE IN GEOMETRIA

§1 - Non crediamo che sia questo il luogo per insistere sul significato e sul valore dell'insegnamento della geometria nella scuola secondaria. Pare che certe "mode" pedagogiche che volevano l'ostracismo della geometria siano ormai svanite; e che sia finalmente venuto il momento di riflettere pacatamente sugli argomenti didattici, senza preclusioni e senza entusiasmi ingiustificati. Pensiamo infatti che abbia ragione H. Freudenthal [1], il quale ha giudicato "un grave errore storico" la preclusione della geometria nell'insegnamento della matematica nelle nostre scuole. E come ragione di questo giudizio ha addotto il fatto che la geometria offre un "contesto ricco", dal quale gli alunni possono partire per la costruzione interiore della struttura del pensiero matematico. E diciamo "costruzione interiore" perché aderiamo alla convinzione del pensatore olandese, secondo il quale l'apprendimento della matematica dovrebbe essere, a tutti i livelli di età e di scuola, una "reinvenzione guidata".

Si intende qui dare un contributo di riflessione al problema della utilizzazione ragionevole dei sussidi didattici che compaiono sempre più numerosi sul mercato. Senza pretendere di pronunciare parole definitive su questo argomento, crediamo che sia ragionevole pensare di valutare il più possibile serenamente i problemi evitando frettolosi e superficiali entusiasmi. Essi potrebbero portare la scuola a fornire prevalentemente, se non addirittura esclusivamente, un servizio di puro addestramento alla utilizzazione dei nuovi strumenti didattici, pretesi miracolosi.

§2 - Pensiamo che le riflessioni sui problemi dell'insegnamento della geometria siano collegate con quelle che riguardano gli oggetti di questa dottrina. Non intendiamo qui aprire una discussione filosofica su questo argomento, perché siamo ben consci del fatto che riflessioni di questo tipo hanno un'età secolare: in questo argomento crediamo infatti che sia d'obbligo la classica citazione di Platone il quale si domandava "di che cosa parlano i geometri”. E rispondeva (si direbbe ovviamente) che non parlano dei disegni che essi tracciano sulla sabbia per rappresentare i concetti geometrici [2]. Temiamo che riflessioni su questi argomenti siano inevitabili: infatti crediamo che anche coloro i quali volessero scansarle come inutili, vane o troppo astratte, dovrebbero affrontare problemi analoghi od equivalenti quando si pongono la doverosa domanda sul significato e sulla portata dell’insegnamento della matematica in generale e della geometria in particolare. Ed invero anche pensatori recenti hanno ripreso la questione; il che conforta la nostra opinione che essa non sia facilmente eludibile [3].

La questione non ci pare vana o, come abbiamo detto, troppo astratta: infatti uno degli argomenti che intendiamo trattare è strettamente collegato con l’impiego di strumenti elettronici per il tracciamento delle figure. Pensiamo quindi che il significato di questa operazione sia da valutare attentamente, per evitare di confondere il fare geometria con il tracciare figure esatte.

Ed a questo proposito ricordiamo il detto scherzoso di un Maestro dal quale udimmo talvolta (scherzosamente appunto, quando le figure sulla lavagna non gli riuscivano molto bene) affermare che “…la geometria insegna a fare i ragionamenti giusti anche quando le figure sono sbagliate”: detto ovviamente scherzoso, ma che potrebbe servire a non confondere la geometria con una mera tecnica di disegno.

§3 - Pensiamo che dal punto di vista della didattica occorra rimeditare su ciò che già la geometria greca aveva codificato, analizzando le procedure seguite dalla nostra mente per ricercare la verità o per risolvere i problemi geometrici. È noto infatti che già si incontrano in Aristotele e in Euclide le due procedure , chiamate di “analisi e sintesi” che ancora oggi si seguono, anche se vengono spesso denominate in modi diversi [4]. Le procedure di “analisi” e di “sintesi” sono così descritte da F. Enriques: “Nell’analisi si comincia a supporre che il problema P sia risoluto e si deducono successivamente le condizioni a cui debbono soddisfare gli elementi cercati, trasformando il problema dato in una serie di problemi, ciascuno dei quali venga risoluto in forza dei precedenti, finché si giunga ad un problema R che si sappia risolvere. La “sintesi” consiste nel partire dalla soluzione di quest’ultimo problema R e dedurne via via la risoluzione della nostra catena di problemi in ordine inverso, fino a dimostrare la soluzione di P. Questa dimostrazione è necessaria, perché con l’analisi si è dimostrato soltanto che le soluzioni di P sono soluzioni di R, ma non viceversa”. [5]..

Pertanto noi pensiamo che il significato di “fare geometria” non possa essere richiuso nell’ambito angusto del fare dei disegni, per quanto esatti essi risultino; anzi, rifacendoci alle riflessioni di Platone e di altri pensatori, vorremmo guardare al “fare geometria” come ad un porsi razionalmente nei riguardi dell’ambiente fisico in cui viviamo, agli oggetti ed ai fenomeni fisici (quali la trasmissione di energia, raggiante e simili); ed il “porsi razionalmente” dovrebbe significare, tra l’altro, la possibilità di dedurre le proprietà degli oggetti, ed i risultati delle manipolazioni che eseguiamo su di essi, in modo da ottenere conoscenze certe da poche premesse evidenti o accettate come tali, e da pochi dati certi.

In questo ordine di idee ci appare chiaro che il momento principale del “fare geometria” sia quello in cui prevale il ragionamento rigoroso sulla immaginazione e sulla elaborazione di un oggetto mentale, che viene rappresentato e, per così dire, materializzato nel disegno.

Queste osservazioni ci potrebbero guidare per comprendere e valutare il ruolo dell’immaginazione nella procedura di risoluzione di un problema geometrico: si comprende infatti che nel momento iniziale della procedura di “analisi” si possono escogitare moltissime situazioni di partenza e moltissimi modi di procedere nella deduzione, cioè nel cammino razionale inevitabile in cui la logica (e non soltanto l’immaginazione o la tecnica del disegno) consegue la certezza.

Tuttavia è chiaro il fatto che l’immaginazione da sola non dia la certezza razionale (come quella cercata dalla scienza in generale e in particolare dalla geometria); vogliamo qui confrontare la nostra opinione con quella del filosofo Spinoza, il quale scrive: “…la semplice immaginazione non implica per sua natura alcuna certezza, quale è connessa invece ad ogni idea chiara e distinta, ma, per poter essere certi delle cose che immagino, si deve necessariamente aggiungere qualche altra cosa, cioè il ragionamento..” [6]

§4 - Ci pare di poter dire che proprio in questa necessaria collaborazione tra l’immaginazione e il ragionare stanno le grandi possibilità formative dello studio della geometria, e viene sfruttato in pieno quel “contesto ricco” di cui parla Freudenthal, che abbiamo citato poco sopra. Uno degli scopi di questo scritto è appunto quello di mostrare come sia possibile scegliere diverse strade per la soluzione di un medesimo problema, pur rispettando l’essenziale schema logico fondamentale delle procedure di analisi e sintesi. A questo scopo abbiamo scelto di presentare alcuni problemi del tutto elementari; e la scelta del loro livello relativamente “basso” ci permetterà di rendere più chiaro il nostro fine, che è appunto la riflessione sulle diverse possibili strade di soluzione, e sulle nozioni e sulle operazioni che implicitamente esse considerano note o applicate senza difficoltà.

Per ognuno dei problemi molto elementari – ripetiamo - abbiamo presentato diverse strade di soluzione: una strada è quella che si percorre abitualmente secondo lo stile tradizionale. Così si immagina il problema risolto e si deducono le conseguenze da questa ipotesi; e la deduzione può essere condotta con le argomentazioni classiche che impiegano la logica tradizionale, espressa verbalmente, oppure con i calcoli, eseguiti sui numeri o sui simboli algebrici che rappresentano gli enti della geometria tradizionale con le convenzioni della geometria analitica.

Una seconda strada potrebbe essere quella che utilizza la geometria delle trasformazioni e le loro proprietà.

Questa seconda strada potrebbe offrire l'occasione per introdurre i concetti algebrici fondamentali che inquadrano formalmente la teoria delle trasformazioni geometriche; è noto che tali concetti sono sostanzialmente quelli relativi alla teoria dei gruppi. E ciò potrebbe condurre anche a riflettere sulle proprietà formali delle operazioni che noi eseguiamo concretamente sugli oggetti che manipoliamo. Inoltre il ricorso esplicito e metodico alle trasformazioni può offrire l'occasione per riflettere sul concetto di "invariante". Questo concetto, come è noto, è stato recentemente utilizzato in modo metodico nella introduzione agli studi di geometria; ma in forma intuitiva ed implicita è sempre stato utilizzato in geometria fino dalla nascita di questa dottrina. Ed invero le riflessioni di Platone potrebbero essere utilmente collegate con l'osservazione - del tutto ovvia - che le figure tracciate dal geometra lo aiutano a dedurre le proprietà che appunto sono invarianti per le trasformazioni tradizionali della geometria elementare. Trasformazioni che, a nostro avviso, affondano le loro radici concettuali nelle esperienze materiali concrete di manipolazione quotidiane degli oggetti rigidi che ci circondano.

Infine una terza strada potrebbe essere quella della risoluzione che chiameremo convenzionalmente "assistita" da programmi "software". Nella fattispecie si tratta del programma "Cabri 2" che si sta rapidamente diffondendo nelle scuole italiane. Pare chiaro infatti che la presenza di questi strumenti può aprire vasti orizzonti alla didattica della matematica. Invero questa dottrina costituisce per gli alunni uno scoglio che per molti è abbastanza grande; e di conseguenza vengono perdute le possibilità formative per la logica e per la maturazione mentale che invece potrebbero essere realizzate e potenziate con un insegnamento efficace. Ma può essere legittima la preoccupazione di chi teme che tali strumenti siano impiegati sempre più frequentemente in modo passivo; e che di conseguenza l'insegnamento rischi di scadere sempre più all'impiego di strumenti mirabolanti invece che alla formazione e alla costruzione di una coerente visione interiore e razionale delle dottrine che si insegnano. Temiamo che questo scadimento sia un pericolo incombente soprattutto per la matematica; infatti pensiamo che le caratteristiche fondamentali di questa dottrina siano la sua astrattezza e l'impiego di simboli potenti, ma in un certo modo artificiali e convenzionali. E queste caratteristiche possono ingenerare talvolta fastidio e addirittura una specie di rigetto in certe menti che non necessariamente debbono essere giudicate di livello deteriore per questi soli fatti.

§5 - **Problema 1**

Sono date in un piano tre rette parallele; determinare un triangolo equilatero in modo che i suoi vertici appartengano ognuno ad una retta diversa.

I **Procedura elementare classica.**

Oss.1 Per brevità utilizzeremo gli strumenti della geometria analitica, ma, se si vuole, sarà facile tradurre ogni passo della procedura con operazioni della geometria elementare.

Chiameremo ***r***, ***s***, ***t*** le rette date e supponiamo di avere scelto i nomi in modo che la retta ***s*** sia interna alla striscia determinata dalle rette ***r*** e ***t***. Secondo la procedura di analisi, immaginiamo il problema risolto (fig. 1)

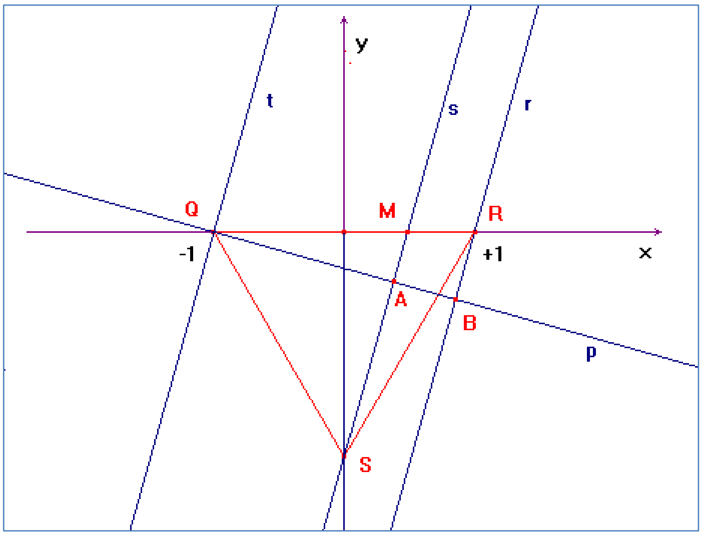

Figura 1

e chiamiamo rispettivamente Q, R, S i vertici del triangolo appartenenti rispettivamente alle rette ***t***, ***r***, ***s***.

Scegliamo un riferimento cartesiano ortogonale come in fig.1, in modo che i vertici del triangolo abbiano rispettivamente le coordinate:

(1) $Q \equiv (-1, 0)$, $R \equiv (1, 0)$, $S \equiv (0, -\sqrt{3})$

In questo riferimento la retta ***s*** avrà un'equazione del tipo:

(2) $Y = m X - \sqrt{3}$.

Indichiamo con M il punto di intersezione della retta ***s*** con il lato QR del triangolo. Indicato con θ l'angolo che la retta ***s*** forma con il lato suddetto, si ha ovviamente:

(3) $\tan\theta = m$.

Dalle (2) si trae che le coordinate di M sono:

(4) $\mathrm{M} \equiv (\sqrt{3}/m, 0)$.

Oss.2 Per la scelta dei nomi delle rette è chiaro che il punto M appartiene al segmento di estremi Q, R. Inoltre è facile convincersi che è lecito supporre valida l'ipotesi:

(5) $m > 0$.

Tracciamo ora da Q una qualunque trasversale alle tre rette date; sia per esempio la perpendicolare ***p*** ad esse, indichiamo con A e B le intersezioni di ***s*** e ***r*** rispettivamente e poniamo anche:

(6) $a = QA$, $b = QB$.

Dal teorema di Talete si ha ovviamente:

(7) $QR/QM = b/a$,

e dalla (4):

(8) $(\sqrt{3}/m + 1)/2 = a/b$;

di qui con facili calcoli:

(9) $m = \sqrt{3}\, b/(2a - b)$

La 9) risolve il problema; essa infatti permette di determinare l'angolo θ tra la direzione comune delle tre parallele date e il lato QR di un triangolo che si cerca.

La verifica (sintesi) può essere fatta nel modo seguente: preso un punto Q sulla ***t***, si mandi da Q la perpendicolare ***p*** ad incontrare ***s*** ed ***r*** rispettivamente nei punti A e B: si avranno così a e b e si potrà costruire l'angolo θ la cui tangente è data dalla (9). Il lato di un triangolo cercato è quello che forma con la retta ***t*** (e quindi anche con le altre) l'angolo θ, ecc.

II Procedura che fa ricorso ai concetti della teoria delle trasformazioni.

Le tre rette date posseggono un invariante per il gruppo delle similitudini; tale invariante può essere determinato geometricamente con il supporto di due segmenti ***a*** e ***b***, ottenuti su di una secante qualunque delle tre rette, come è stato fatto sopra.

Si costruisca un triangolo equilatero qualunque e siano *Q', R', S'*, i suoi vertici. Si costruisca sul lato *Q'R'* il punto *M'* tale che valga:

$$Q'M'/Q'R' = a/b. \tag{10}$$

Si chiami ***s'*** la retta che congiunge *S'* con *M'* e siano ***t'*** e ***r'*** le rette per *Q'* e *R'* parallele alla ***s'*** ora tracciata; è chiaro che con una similitudine si può portare la terna di rette, ora costruita, sulla terna data.

Oss. 3 Nella procedura ora esposta il momento della "analisi" si avvera quando si prende coscienza del fatto che nella soluzione del problema interviene una trasformazione per similitudine e che per poterla eseguire è necessario che le costruzioni conservino gli invarianti per il gruppo delle similitudini. Il momento della "sintesi" si avvera quando si osserva che le tre rette costruite soddisfano anche alle condizioni sufficienti per essere trasferite con una similitudine sulle tre rette date e che l'operazione trasforma (ovviamente) un triangolo equilatero in uno della stessa specie.

III Procedura assistita da "Cabri"

Presi un punto *A* sulla retta ***r*** e un punto *B* sulla retta ***s***, con una "macro" preesistente si può iniziare costruendo un triangolo equilatero *ABC,* con il vertice *C* da parte opportuna rispetto ad *AB* (vedere fig. 2). Il vertice *C* generalmente non è un punto di ***t***. Muovendo *B* lungo ***s***, il vertice *C* si muove fino a suggerire la soluzione su ***t***, ma contemporaneamente sembra far "vedere" di percorrere una retta, ***r'*** (sarà una retta?). Essa evidenzia la sua direzione e posizione rispetto alle parallele e ai punti segnati, in quanto si ha una ben precisa posizione, che diciamo limite, di *C* su ***r***, in cui il punto *B* è evidenziato sul disegno con *N* e *C* con *M*. Il segmento *MN* determina la retta. Il "Cabri" permette anche di evidenziare la retta con la funzione "luogo di punti": essa è infatti il luogo dei punti *C* al variare di *B* su ***s*** (vedere figura 3).

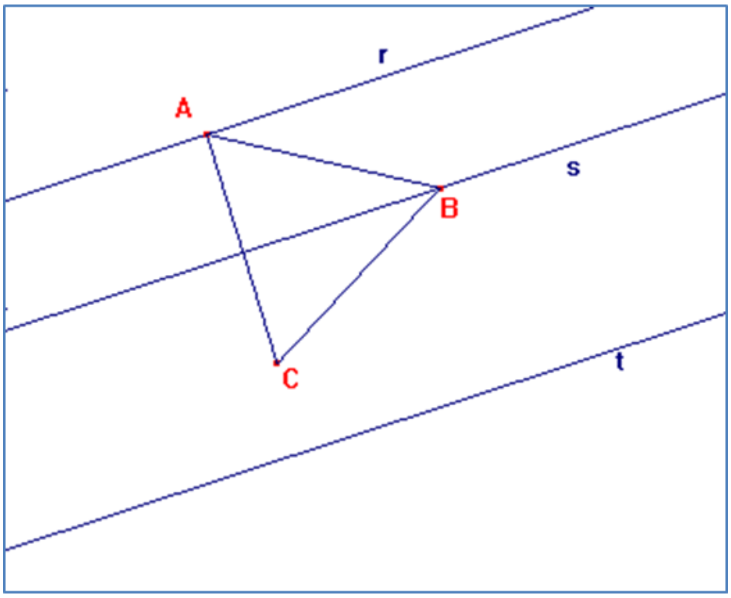

Figura 2

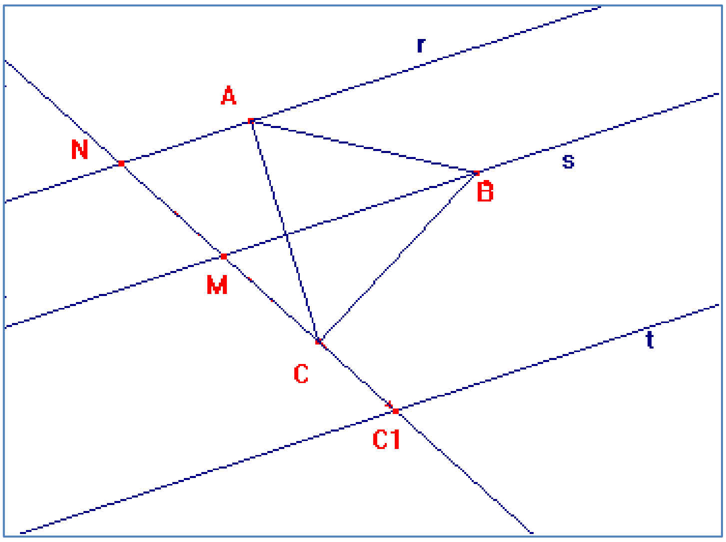

Figura 3

Il lavoro col CABRI dà come soluzione il punto *C* sulla retta ***t*** (indicato con *C1*), intersezione della retta ***t*** con la retta ***r'***. Se ciò fosse vero avremmo però due soluzioni, perché varrebbe certamente anche la simmetrica rispetto alla perpendicolare ad ***r*** per *A*.

Dobbiamo adesso dimostrare che il suggerimento grafico ottenuto col dinamismo che permette di osservare la variabilità della situazione, sia veramente la soluzione. Nessun suggerimento di questo tipo, nessun modello grafico di verifica può sostituire la dimostrazione! Procediamo nel modo seguente:

(a) Dimostriamo che preso un punto *C* qualsiasi sulla retta ***r'***, un triangolo isoscele con *AC* = *CB* è anche equilatero.

(b) Se si ha un triangolo equilatero *ABC* con i vertici *A* e *B* nelle condizioni precedenti, il punto *C* giace sulla retta ***r’*** trovata.

Per quanto riguarda (a), poiché il triangolo *MNA* è equilatero per costruzione, l’angolo *ANM* misura 60°; per il parallelismo è anche di 60° l’angolo *OMC* (*O* è il punto di intersezione di *AC* con ***s***) e di conseguenza l’angolo *AMO* (vedere figura 4). I triangoli *ANC* e *OMC* sono simili, quindi *NA : MO = AC : OC*. Ma *NA = MA* e *AC = BC* per costruzione. Si può allora scrivere *MA : MO = BC : OC*; inoltre gli angoli *AOM* e *BOC* sono uguali perché opposti al vertice. Di conseguenza i triangoli *AMO* e *OBC* sono simili. In particolare hanno gli angoli uguali, quindi l’angolo *OCB* vale 60°. Il triangolo isoscele *ABC* ha l’angolo in *C* di 60°, è quindi equilatero**.**

Per quanto riguarda (b), vale per l’unicità del triangolo stesso.

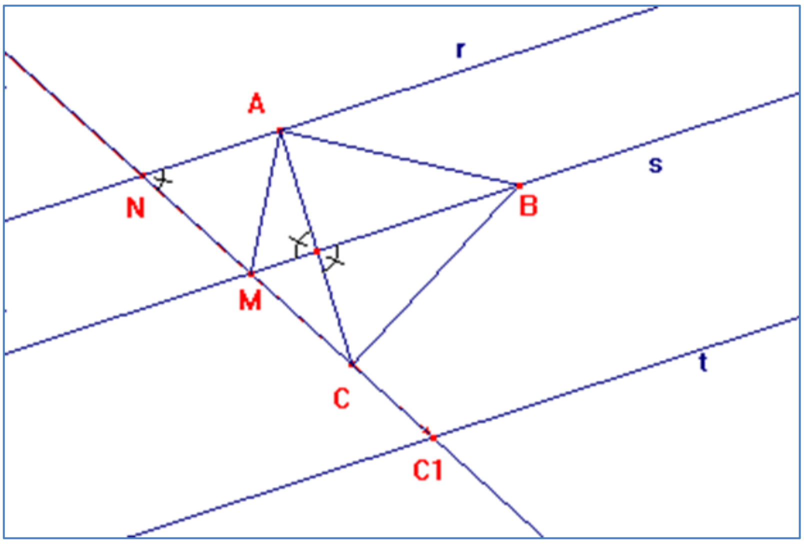

Figura 4

OSSERVAZIONI

Dopo una prima impostazione grafica derivante da una precisa scelta del solutore, poco esplicitabile nella sua causalità perché derivante dalla sua cultura e della sua esperienza, il “Cabri” suggerisce proprio una soluzione e induce una dimostrazione originale che forse non sarebbe potuta venire in mente in altro modo. Per meglio precisare diciamo che la mente trae normalmente suggerimenti da immagini che spesso necessitano di trasformazioni per divenire sempre più idonee ad esprimere relazioni tra i dati del contesto. Essa ha però difficoltà a gestire una grande variabilità di tali immagini vivendole in una contemporaneità. Lo strumento fornisce la possibilità di rendere invece presente ed attuale in modo virtuale il complesso delle trasformazioni che man mano si eseguono. Poiché l'aggettivo "virtuale" ha oggi un'ampia accezione, vogliamo qui intenderlo come l'attributo di una realtà costruita da noi stessi per mezzo di un software, recepibile visivamente e manipolabile solo mediante il programma. Tali trasformazioni, nella loro sequenza, possono generare la soluzione rimandando alla dimostrazione. Ecco allora che l'analisi e la sintesi che si vengono ad operare per giungere a tale soluzione, sono coerenti al suggerimento e determinate da esso. Nel caso precedente il suggerimento grafico permette una dimostrazione di geometria elementare, ma non è detto che questo sempre avvenga. A questo punto vanno però sottolineate, rispetto a quest'ultima dimostrazione, l'economia di pensiero, la logica espositiva e l'eleganza di quella che sfrutta la "geometria delle trasformazioni". Il poter far riferimento al panorama che essa induce attraverso le sue leggi e al concetto di invariante in generale, conduce implicitamente ad ampliare la gamma degli strumenti di soluzione prendendo coscienza dell'esistenza di strutture mentali che possediamo, ma che non sfruttiamo esplicitamente fino in fondo. Ciò permette di tentare la formalizzazione perché il lavoro che si sta compiendo ci porta ad apprezzare e a dominare una massa di risultati per leggerli e sfruttarli ad un livello superiore.

§6 - **Problema 2**

Sono date in un piano due rette *r* e s parallele tra loro, ed un punto *P* interno alla striscia determinata dalle rette stesse. Determinare una circonferenza *k* che passi per *P* e sia tangente ad entrambe le rette.

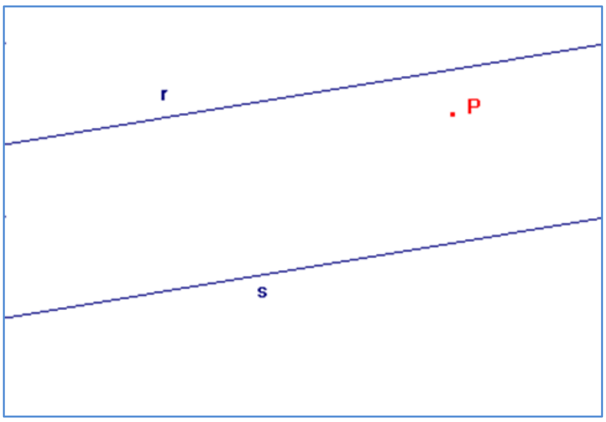

Figura 5

I Procedura elementare classica

Chiamiamo ***m*** la retta bisettrice della striscia determinata dalle due rette date della fig. 5. La ***m*** è ovviamente parallela alle rette stesse. Chiamiamo *d* la distanza tra ***m*** e ***r*** (e quindi anche tra ***m*** e ***s***). Sia *O* il centro di una circonferenza *k* che risolve il problema. Il punto *O* deve appartenere alla retta ***m*** e quindi il raggio della *k* deve essere uguale a *d*. La distanza di *O* da *P* deve quindi essere uguale a *d*. Tracciamo la circonferenza avente centro in *P* e avente raggio *d*. Tale circonferenza interseca in *O* la retta ***m***, inoltre essa interseca la ***m*** in un altro punto *O'* il quale è pure centro di una seconda circonferenza che soddisfa il problema. La procedura precedente può ovviamente essere tradotta con i metodi della geometria analitica.

II - Procedura che fa ricorso ai concetti della geometria delle trasformazioni.

Si tracci una circonferenza tangente ad entrambe le rette ***r*** e ***s*** e sia *O'* il suo centro, appartenente alla mediana ***m***. Se tale circonferenza non passa per *P*, è facile convincersi che essa può essere condotta a passare per *P* con un'operazione di traslazione che faccia scorrere su se tesse le due rette **r** e ***s*** (e quindi anche la mediana ***m***). Tale traslazione può essere determinata mandando per *P* la parallela alle tre rette nominate; dette *P'* e *P''* le intersezioni di tale parallela con la circonferenza costruita, ognuna delle due traslazioni, determinate dai vettori *P'P* oppure *P''P*, porta la circonferenza a passare per *P*.

II - Procedura assistita da Cabri.

Data la semplicità del problema, ma anche la possibilità di sfruttare Cabri in modi diversi, vorremmo lasciare agli insegnanti la ricerca dei possibili comportamenti, sollecitando tuttavia una riflessione sui riferimenti culturali che si mettono in atto nei diversi approcci alla macchina. Analogo discorso andrebbe fatto relativamente alla costruzione delle soluzioni del "Problema 1" con Cabri, dopo aver ipotizzato la soluzione con gli strumenti della geometria delle trasformazioni.

La semplicità degli strumenti risolutivi ha però fatto pensare di sfruttare didatticamente il contesto anche in una terza media con allievi non abituati a problemi di costruzione. Ciò ha permesso di fare alcune riflessioni del tutto imprevedibili sulla didattica della matematica che forse vale la pena di considerare. Si vuole qui evidenziare proprio l'apporto generale di idee che ne è derivato.

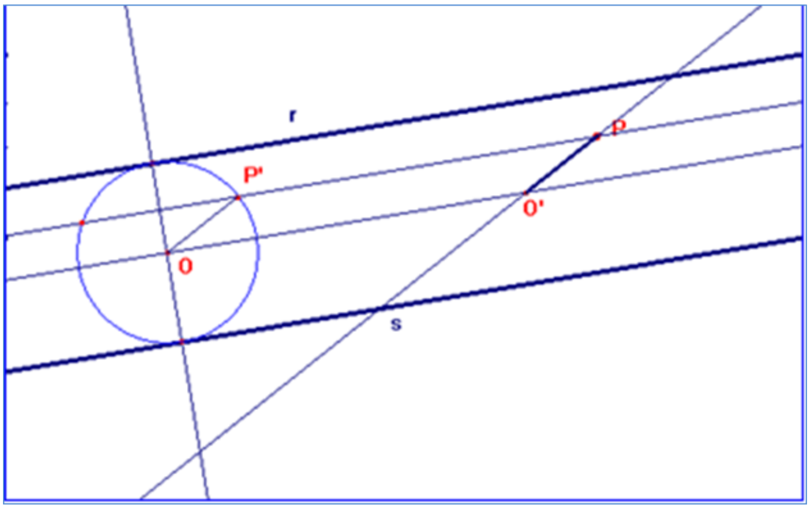

Figura 6

Disegnate le due rette, gli allievi individuano con facilità la circonferenza tangente dopo aver tracciato una generica perpendicolare alle stesse con i necessari riferimenti alle conoscenze. Permettendo CABRI di "muovere" la circonferenza con un movimento "virtuale" lungo la striscia formata dalle due rette parallele, gli operatori "vedono" facilmente che il centro *O* di tale circonferenza percorre una ben particolare retta parallela alle precedenti e che, ad un certo punto, la circonferenza va a passare per il punto *P*. La circonferenza è determinata come raggio, il problema è allora di trovare il centro *O'* sulla retta e compatibile col punto *P*. La soluzione nasce nel modo seguente: dopo una breve riflessione ritornano al punto di partenza, tracciano una circonferenza tangente, la retta dei centri e la retta parallela per *P*, segnando "il" punto *P'*, una delle due intersezioni della retta con la circonferenza (quello che sarebbe andato in P con la traslazione vista precedentemente). Tracciato il segmento *OP'*, mandano per *P* una parallela ad *OP'*. L'intersezione della stessa con la retta contenente *O*, ha dato *O'*.

Sul momento non rilevano la seconda soluzione, ma (cosa interessante) non sentono il bisogno di tracciare la circonferenza avendone individuato il raggio e il centro.

RIFLESSIONI

A questo punto non è possibile far a meno di domandarsi come CABRI abbia influito nel portare suggerimenti e quale sia stato effettivamente il percorso logico messo in atto, relativamente alle due soluzioni razionalmente evidenziate all'inizio.

Da un certo punto di vista pare che i discenti, quasi spontaneamente, siano stati sollecitati logicamente ad usare il procedimento classico di analisi il quale parte dalla soluzione come già acquisita. Tuttavia non si può pensare che, di fatto, questo sia un comportamento spontaneo; infatti si direbbe che a questa età si procede piuttosto per tentativi ed errori. Qui il tutto pare sia stato indotto da un procedimento grafico che porta alla soluzione prima di aver permesso troppi passi erronei facilmente devianti e che comunque non si sostituisce al discente nei riferimenti concettuali. Pensiamo, infatti, che il comportamento logico ricordato solitamente venga indotto dall'insegnante nella scuola superiore e non con facilità: lo si offre ai discenti nella dimostrazione di teoremi o nella soluzione di problemi elementari e si ritiene che essi sappiano ragionare quando sono in grado di riprodurlo senza particolari difficoltà. Tuttavia in tal modo non ci si può rendere conto se e quando questi itinerari predeterminati portino ad un vero possesso dello strumento logico che vi soggiace. Nella situazione precedente, l'atto dinamico che ha sollecitato i discenti alla ricerca della soluzione, permette di rendere cosciente il processo. Sarebbe infatti molto facile innescare una discussione motivata su di un comportamento che l'allievo ha messo in atto autonomamente. Può forse essere questa una strada per migliorarne la possibilità di appropriazione.

Da un secondo punto di vista pare però che gli allievi abbiano palesemente fatto ricorso ad uno spostamento rigido ben visibile, ad una traslazione. Qui nasce il problema della didattica della geometria, in particolare della "geometria delle trasformazioni". Quando si inizia già alle elementari a far fare concretamente al bambino esperienze di traslazioni, rotazioni, simmetrie ecc, azioni utilissime ai fini della presa di coscienza di una realtà dinamica con cui fare i conti, lo si induce poi a modellizzare su di un foglio, con gli oggetti della geometria, i risultati delle azioni eseguite; ciò è forse necessario a tale livello di apprendimento. Ma la mente di colui che usa tali strumenti non è mai portata a riflettere sulla reale concettualizzazione della sistemazione logica della "Geometria delle trasformazioni". Il CABRI, come di solito viene sfruttato, potrebbe accentuare tale confusione, non solo, potrebbe introdurne una ulteriore tra spostamento e movimento. Pensiamo invece che proprio sfruttando CABRI e la sua possibilità di azione "virtuale", tanto efficace da suggerire soluzioni originali e sollecitare percorsi logici imprevedibili, si possa introdurre la geometria come strumento di lettura della realtà passando dalla realtà delle cose alla realtà delle idee.

§7 - Problema 3

In un piano sono date tre rette: *r, s, t,* ed una circonferenza *k*. Inscrivere nella *k* un triangolo i cui lati siano paralleli alle tre rette date.

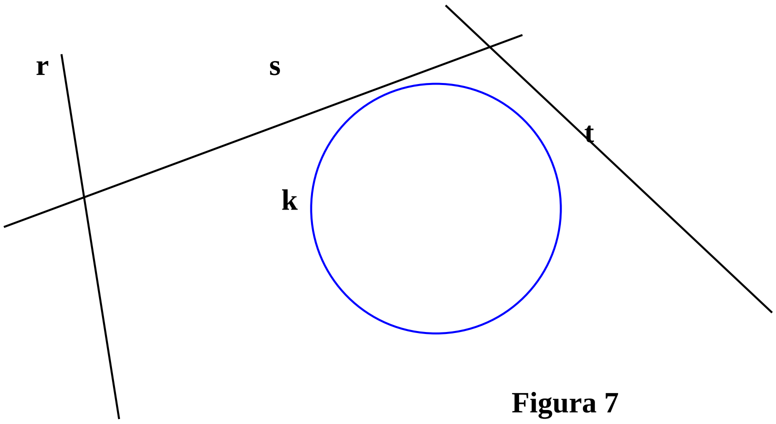

Figura 7

I - Procedura elementare classica.

Indichiamo con *O* il centro della *k* e sia *r* il suo raggio.

Indichiamo con *A, B, C* i tre vertici del triangolo cercato (si tratta di punti di *k*) e con *a, b, c* rispettivamente le lunghezze de lati opposti, i quali devono essere rispettivamente paralleli alle rette date: ***r***, ***s***, ***t***. Indichiamo con α l'angolo del triangolo che ha vertice in *A*; tale angolo è noto perché i due lati che convergono in *A* sono paralleli alle due rette ***s*** e ***t***. Il teorema dei seni permette allora di scrivere:

$$(1) \qquad a = 2\, r \sin\alpha;$$

pertanto la lunghezza del lato opposto al vertice A è nota; poiché è nota anche la sua direzione (quella della retta ***r***), la sua distanza dal centro *O* della *k* si ottiene facilmente con il teorema di Pitagora. In modo analogo si costruiscono i lati ***b*** e ***c*** del triangolo cercato.

Osservazione. La determinazione di *a* in forza della formula (1) non richiede la consultazione di tavole, ma può essere conseguita con riga e compasso, utilizzando il Teorema di Talete, essendo l'angolo α dato geometricamente mediante rette parallele ai suoi lati.

II - Procedura che fa ricorso ai concetti della geometria delle trasformazioni.

Nel piano, in una posizione qualunque, si costruisca un triangolo di vertici *A', B', C'*, i cui lati siano paralleli alle rette date: ***r***, ***s***, ***t***. Sia *k'* la circonferenza circoscritta al triangolo costruito e sia *O'* il suo centro. Una omotetia piana che porta *O'* in *O* e *k'* in *k* porta il triangolo costruito in un triangolo che risolve il problema.

III - Procedura assistita da Cabri.

Con il "Cabri 2" è possibile "virtualmente" realizzare un comportamento dinamico e "attuare" i movimenti necessari alla realizzazione del "modello" concreto della trasformazione, cosa che naturalmente non è riproducibile su carta ed è quindi solo visibile direttamente sul monitor**.** È questa un'attività del tutto nuova che potrebbe consentire di "verificare" i processi logici sollecitati dalla esperienza. Ci si potrebbe infatti domandare a quale diverso livello intellettuale si opera rivedendo il tutto in termini di geometria delle trasformazioni. Il rendersi conto che, senza compiere nessuna delle operazioni concrete prima eseguite, ci si potrebbe garantire del risultato da raggiungere, è una prospettiva mentale che solo la matematica può dare. Il problema delle trasformazioni non è infatti la costruzione con riga e compasso della soluzione concreta, ma l'elaborazione astratta della sua esistenza. Il Cabri permette forse di sfruttare meglio questo ambiente di corrispondenze biunivoche dove il nocciolo è una relazione di equivalenza che soggiace all'esistenza degli invarianti. Pensiamo che sia da superare l'atteggiamento, che può essere giudicato riduttivo, che conduce a confondere il metodo delle trasformazioni con la semplice struttura delle costruzioni. La rappresentazione grafica della soluzione con Cabri 2 è ovviamente interessante ed esprimibile in vari modi. Non crediamo qui di doverla evidenziare, ma ci limitiamo a porre l'accento sull'uso del software in termini di produzione virtuale di realtà.

IV - Procedura col metodo di falsa posizione.

Indichiamo con **u**, **v**, **w** le rette per *O* e perpendicolari ai lati (finora incogniti) del triangolo cercato; tali rette sono anche perpendicolari alla rette date **r**, **s**, **t,** e quindi si sanno tracciare. Si immagini ora noto un vertice del triangolo che si cerca, sia per es. il vertice *C*; allora il simmetrico di *C* rispetto alla retta ***u*** è il vertice *A*, il simmetrico di *A* rispetto alla retta ***v*** è il vertice *B*, ed infine il simmetrico di *B* rispetto alla retta ***w*** è di nuovo il vertice *C* e il ciclo si chiude. Se si partisse da un punto *X* diverso da *C* e si costruissero i simmetrici rispetto alle tre rette ***u***, ***v***, ***w***, si troverebbe invece che il ciclo non si chiuderebbe, perché dopo tre operazioni di simmetria si ottiene un punto *X'* diverso da *X*. Si dimostra che il punto medio dell'arco che ha estremi *X'* e *X* è il punto *C* che permette la soluzione del problema.

Dimostrazione. Nel fascio di centro *O* si assuma la retta *OC* come origine degli angoli. Indichiamo con α, β, γ rispettivamente gli angoli che le rette ***u***, ***v***, ***w*** formano con la retta origine degli angoli. Si dimostra che vale la relazione:

$$(1) \qquad \alpha - \beta + \gamma \equiv 0 \pmod{\pi}.$$

Sia ora σ l'angolo che la retta *OX* forma con la retta origine. La retta *OX'* che contiene il punto simmetrico di *X* rispetto alla ***u*** forma con la retta origine un angolo σ' dato da:

$$(2) \qquad \sigma' = 2\,\alpha - \sigma$$

Ricercando ora il simmetrico di *X'* rispetto a ***v*** si ottiene un punto *X''* a cui corrisponde un angolo σ'' dato da:

$$(3) \qquad \sigma'' = 2\,\beta - \sigma = 2\,(\beta - \alpha) + \sigma'$$

Ripetendo l'operazione si ottiene un punto *X'''* a cui corrisponde un angolo σ''' dato da:

$$(4) \qquad \sigma''' = 2\,\pi - \sigma'' = 2\,(\alpha - \beta + \gamma) - \sigma$$

Ricordando la (1) si ottiene il risultato.

§8 - Ripetiamo ancora una volta che gli esempi proposti sono stati scelti ad un livello molto elementare proprio per concentrare l'attenzione dell'eventuale lettore sull'analisi riguardante la struttura logica delle procedure impiegate. Ed a questo proposito pensiamo che le discussioni ed i commenti presentati abbiano contribuito a convalidare le opinioni da noi espresse in precedenza. In particolare pensiamo che ogni strumento di ausilio didattico, per quanto sofisticato esso sia, debba essere sempre dominato dall'insegnante che lo utilizza, e rivolto allo scopo fondamentale dell'insegnamento: pare a noi che, soprattutto nel caso della geometria, questo scopo non sia il semplice tracciamento di figure esatte o la ricerca passiva della soluzione dei problemi che si trovano sui libri, o che sono proposti alle prove di esame; ma sia invece l'educazione alla schematizzazione delle situazioni problematiche e l'allenamento alla deduzione rigorosa ed ineccepibile.

Note

[1] Hans Freudenthal. Revisiting Mathematics Education. China Lectures.
Tradotto in italiano da Carlo Felice Manara col titolo “ Ripensando l’educazione matematica”. Brescia [La Scuola], 1994.

[2] “I geometri si servono delle figure visibili e ragionano su di esse, ma non ad esse pensando, bensì a ciò di cui esse sono le immagini, ragionando sul quadrato in sé, sulla diagonale in sé, e non su quelle che disegnano. Lo stesso si dica per tutte le figure che essi disegnano o modellano, di cui si servono come immagini (a guisa di ombre o di immagini riflesse sulle acque) cercando di veder certe verità che non si possono vedere se non col pensiero”. Platone. La repubblica. 510, d, e

[3] Cfr. Imre Toth. Aristotele ed i fondamenti assiomatici della geometria [Prolegomeni alla comprensione dei frammenti non – euclidei del “Corpus Aristotelicum”). Milano, (Vita e Pensiero), 1997]

[4] Euclide. Elementi. Libro XIII.
Gli storici sono propensi a credere che il passo sia interpolato. Cfr. per es.: Thomas H. Heats. The thirteen books of Euclid’s Elements. Vol. I. L’analisi metodologica della procedura di dimostrazione di un teorema o di soluzione di un problema si incontra anche in Pappo.

[5] Federico Enriques. Voce “Analisi” in Enciclopedia Italiana Treccani.

[6] Benedetto Spinoza. Trattato teologico – politico. Torino [Giulio Einaudi] 1980. Traduzione e commenti di Antonio Droetto e Emilia Ciancotti Boscherini.

J. Albers. Homage to the square (1957)